

Öğrencinin

Adı ve Soyadı :

Fak. No :

1	2	3	4	5	TOP

1) Aşağıdaki kavramları tanımlayınız.

a) lineer dönüşüm

b) Ayrık dairesel permütasyon

c) $\text{Hom}(V, W)$

d) Ortogonal izdüşüm

2) $\mathbb{R}^3$ iç çarpım uzayında $(2, 1, -2)$ vektörü tarafından gerilen uzayın ortogonal komplemanı bulunuz.

3) $A, B \in \text{Hom}(V, W) \Rightarrow A+B \in \text{Hom}(V, W)$ dir. ispatlayınız.

4) $\mathbb{R}^2$ 'nin standart iki bazı $\phi = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\}$ ve $\phi' = \{\vec{\alpha}_1', \vec{\alpha}_2'\}$ olsun. Bu iki baz arasında

$$\vec{\alpha}_1' = 2\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2$$

$$\vec{\alpha}_2' = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$$

bağıntısı verilmiş olsun. $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümünün

$\phi = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\}$ bazına göre matrisi $A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ise ϕ' bazına göre $A_{\phi'}$ matrisini bulunuz.

5) Bir M cümlesi üzerindeki iki dairesel permütasyonun çarpımından elde edilen permütasyonun dairesel olup olmadığını bir örnekle gösteriniz. Başarılar

Not: Süre 75 dk olup sorular eşit puanlıdır.

2/ $U = \text{sp}\{(2, 1, -2)\}$ olmak üzere,

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp, \quad U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in U\}$$

yazılabilir. O halde,

$$y \in U \Rightarrow y = c(2, 1, -2); \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \langle (2c, c, -2c), (x_1, x_2, x_3) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2cx_1 + cx_2 - 2cx_3 = 0$$

$\forall c \quad c \neq 0$ için,

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

elde edilir. Bu denklemi çözersek.

$x_1 = t, \quad x_2 = k, \quad t, k \in \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\vec{x} = (t, k, t + \frac{k}{2}) \quad \text{olmak üzere.}$$

$$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = (t, k, t + \frac{k}{2}); \quad t, k \in \mathbb{R}\}.$$

bulunur.

$$\vec{\alpha}'_j = \sum_{i=1}^2 p'_{ij} \vec{\alpha}_i, \quad 1 \leq j \leq 2$$

$$\vec{\alpha}'_1 = p'_{11} \vec{\alpha}_1 + p'_{21} \vec{\alpha}_2 = 2\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2$$

$$\vec{\alpha}'_2 = p'_{12} \vec{\alpha}_1 + p'_{22} \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$$

$$P' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_2(-1)$
 $\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$H_2(1/3)$
 $\sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_P$

$$A_{\phi'} = P A_{\phi} P'$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$